GPS – método de triangulación – solución numérica

INTRODUCCIÓN

Para comenzar diré que este articulo lo publico a partir de lo difícil que fue para mi conseguir ayuda sobre la solución numérica al método de triangulación para la ubicación de un punto conociendo 4 puntos y la distancia respectiva de cada uno de estos puntos al punto buscado.
Acerca del concepto de lo que es un GPS y su funcionamiento hay vasta información en Web pero, quizá me equivoque, no he encontrado una solución concreta para el método de triangulación. Así que no abundare en conceptos acerca del modus operandi de este aparato.
Para hallar la solución numérica puede tomarse varios caminos pero antes de tomar alguno de ellos debemos definir los parámetros de este método.
La triangulación es usada por los GPS's para la ubicación de un punto en la tierra conociendo la ubicación de 4 satélites (S1, S2, S3, S4) y las respectivas distancias (d1, d2, d3, d4) de los satélites al punto buscado (P0).

DESCRIPCIÓN LOGICA DEL METODO

Paso 1

El GPS envía una señal de radio al primer satélite y este a su vez traza imaginariamente una esfera con centro en las coordenadas de S1 (x1, y1, z1) y radio d1, y supone que el punto se encuentra dentro de esa esfera.

Paso 2

Luego el GPS envía una señal de radio al segundo satélite y este traza una segunda esfera con centro en S2 (x2, y2, z2) y radio d2 y determina que el punto se encuentra dentro del ***circulo*** que se forma de la intersección de las esferas S1 y S2.

Paso 3

Luego el GPS hace lo propio con el tercer satélite y este traza una tercera esfera con centro en S3 (x3, y3, z3) y radio d3 la cual, al interceptarla con el circulo ya encontrado nos dará dos posibles puntos como solución

Paso 4

Por ultimo el GPS manda una ultima señal al cuarto Satélite el cual trazara una cuarta esfera desde S4 (x4, y4, z4) y radio d4 de donde se hallara el punto P0 de coordenadas (x0, y0, z0) con lo cual se encontrara así el punto buscado.

Determinación de las distancias d1, d2, d3, d4

Para determinar las distancias del GPS a los 4 satélites se usa una a de las reglas del movimiento rectilíneo uniforme diferencial

$d_i = t * c \pm \Delta$

Donde

t = Diferencia de reloj entre los puntos (tiempo de viaje de la señal)

c= Velocidad de las ondas electromagnéticas, en este caso de radio que es la misma que la de la luz(c=299,792.458 m/s).

Δ= Error que se admite ya que la señal no viaja en el vació

SOLUCIÓN

Seguro que jamás te habías preguntado porque en tus cursos de geometría analítica plana y espacial no se había tocado a fondo ejercicios sobre intersección de circunferencias o de esferas, y menos si se trataban de problemas de carácter generalizado, si no los hiciste hasta ahora cuando trates de resolver el problema literalmente como lo he explicado sabrás el porque.

Claro que Lehman nos da una especie de ayuda en su capitulo de circunferencia al hallar la circunferencia que pasa por la intersección de dos circunferencias, claro sin decir exactamente en que puntos se intersecan estas.
Si intentamos resolver el problema tal y como se describe, como primer paso se definiría la ecuación de 4 esferas con centro el S1, S2, S3, S4 y seria así:

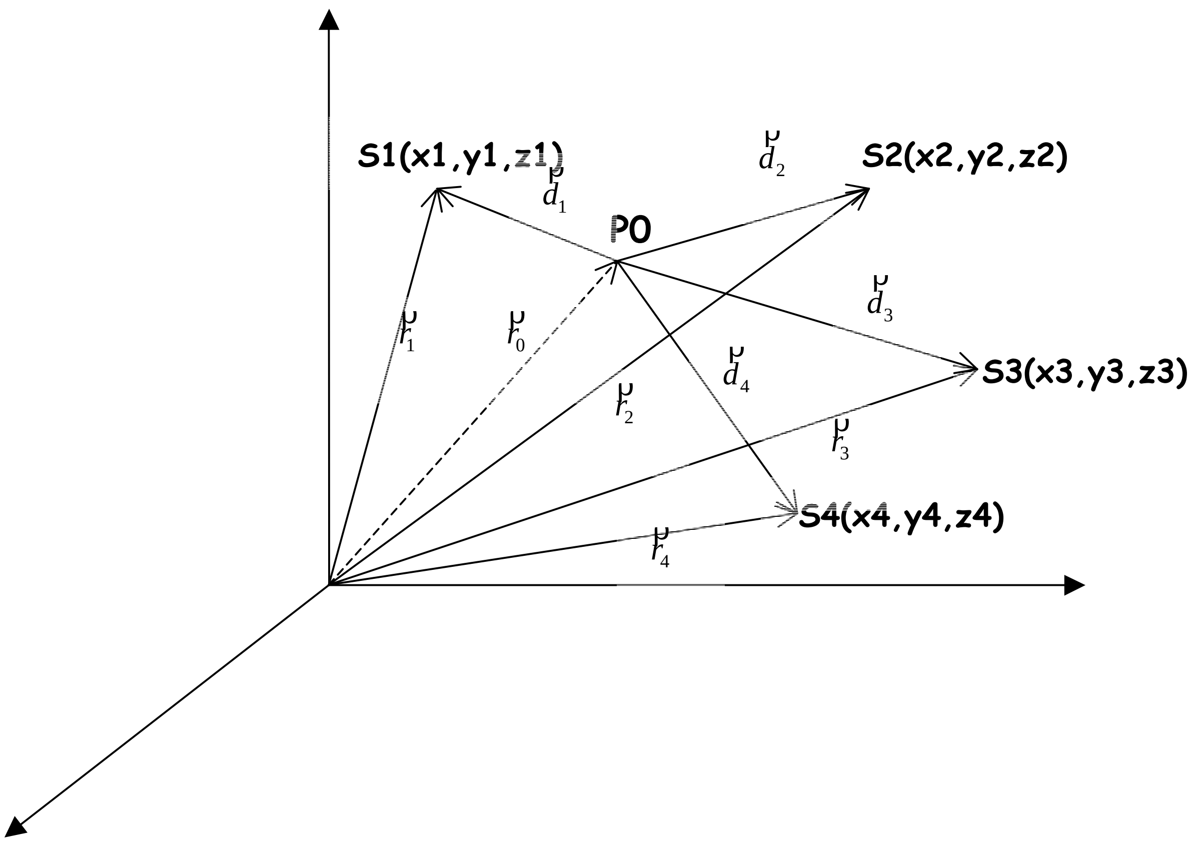
E1: $(x-x1)^2+(y-y1)^2+(z-z1)^2=d1^2$

E2: $(x-x2)^2+(y-y2)^2+(z-z2)^2=d2^2$

E3: $(x-x3)^2+(y-y3)^2+(z-z3)^2=d3^2$

E4: $(x-x4)^2+(y-y4)^2+(z-z4)^2=d4^2$

Luego intentaremos interceptar $E1\cap E2$ nos encontraremos con la ecuación de una circunferencia con términos en xy, yz, y xz y ya que no sabríamos los ángulos directores de la circunferencia engendrada y si a su vez se intentase interceptar esta circunferencia con E3 la cosa se pondría color de hormiga, así que buscaremos una solución más hábil para este problema.
Esta solución la hallaremos con la ayuda de la mano siempre oportuna del álgebra vectorial, así que definamos el escenario.
Primero debemos de conocer ciertos conceptos que nos ayuden a encontrar una relación entre los vectores, lo cual nos permita encontrar el punto buscado.
Una de las cosas que debemos saber es que los satélites orbitan a 20000 Km. de la tierra ósea que a su vez ellos están navegando en una esfera, ahora suponiendo que el centro de la tierra es el origen de coordenadas y que la esfera que contiene a los satélites tiene un radio dado (podemos poner el valor de 20000 si deseamos) que llamaremos R entonces comenzaríamos definiendo que:



$$\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = \|\vec{r}_3\| = \|\vec{r}_4\| = R$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{d}_1$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \vec{d}_2$$
$$\vec{r}_3 = \vec{r}_0 + \vec{d}_3$$
$$\vec{r}_4 = \vec{r}_0 + \vec{d}_4$$

De donde tenemos:

$$\|\vec{r}_1\|^2 = \|\vec{r}_o\|^2 + 2\vec{r}_0.\vec{r}_1 + \|\vec{d}_1\|^2 \text{ ……………………. (1)}$$
$$\|\vec{r}_2\|^2 = \|\vec{r}_o\|^2 + 2\vec{r}_0.\vec{r}_2 + \|\vec{d}_2\|^2 \text{ ……………………. (2)}$$
$$\|\vec{r}_3\|^2 = \|\vec{r}_o\|^2 + 2\vec{r}_0.\vec{r}_3 + \|\vec{d}_3\|^2 \text{ ……………………. (3)}$$
$$\|\vec{r}_4\|^2 = \|\vec{r}_o\|^2 + 2\vec{r}_0.\vec{r}_4 + \|\vec{d}_4\|^2 \text{ ……………………. (4)}$$

Efectuando:

<u>(1) – (2)</u>

$$\vec{r}_0.(\vec{d}_1 - \vec{d}_2) = \frac{\|\vec{d}_2\|^2 - \|\vec{d}_1\|^2}{2}$$

<u>(2) – (3)</u>

$$\vec{r}_0.(\vec{d}_2 - \vec{d}_3) = \frac{\|\vec{d}_3\|^2 - \|\vec{d}_4\|^2}{2}$$

<u>(3) – (4)</u>

$$\vec{r}_0.(\vec{d}_3 - \vec{d}_4) = \frac{\|\vec{d}_4\|^2 - \|\vec{d}_3\|^2}{2}$$

Sabiendo que:

$$\vec{d}_1 = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$$
$$\vec{d}_2 = (x_2 - x_0; y_2 - y_0; z_2 - z_0)$$
$$\vec{d}_3 = (x_3 - x_0; y_3 - y_0; z_3 - z_0)$$
$$\vec{d}_4 = (x_4 - x_0; y_{41} - y_0; z_4 - z_0)$$

Tenemos:

$$\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$
$$\vec{d}_2 - \vec{d}_3 = (x_2 - x_3; y_2 - y_3; z_2 - z_3)$$
$$\vec{d}_3 - \vec{d}_4 = (x_3 - x_4; y_3 - y_4; z_3 - z_4)$$

De las ecuaciones 1-2, 2-3, 3-4, tenemos el sistema siguiente:

$$x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) + z_0(z_1 - z_2) = \frac{\|\vec{d}_2\|^2 - \|\vec{d}_1\|^2}{2}$$
$$x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) + z_0(z_2 - z_3) = \frac{\|\vec{d}_3\|^2 - \|\vec{d}_2\|^2}{2}$$
$$x_0(x_3 - x_4) + y_0(y_3 - y_4) + z_0(z_3 - z_4) = \frac{\|\vec{d}_4\|^2 - \|\vec{d}_3\|^2}{2}$$

Y finalmente hallamos los puntos buscados:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\|\vec{d}_2\|^2 - \|\vec{d}_1\|^2}{2} & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \frac{\|\vec{d}_3\|^2 - \|\vec{d}_2\|^2}{2} & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ \frac{\|\vec{d}_4\|^2 - \|\vec{d}_3\|^2}{2} & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & \frac{\|\vec{d}_2\|^2 - \|\vec{d}_1\|^2}{2} & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & \frac{\|\vec{d}_3\|^2 - \|\vec{d}_2\|^2}{2} & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & \frac{\|\vec{d}_4\|^2 - \|\vec{d}_3\|^2}{2} & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}$$

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & \dfrac{\|\vec{d}_2\|^2 - \|\vec{d}_1\|^2}{2} \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & \dfrac{\|\vec{d}_3\|^2 - \|\vec{d}_2\|^2}{2} \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & \dfrac{\|\vec{d}_4\|^2 - \|\vec{d}_3\|^2}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}$$

Pero, ¿que pasaría si las orbitas de los satélites en lugar de ser circulares fuesen elípticas? La única variación que la solución tendría es que no podríamos asumir que las distancias del origen a los satélites serian las mismas.
Ósea:

$$\|\vec{r}_1\| \neq \|\vec{r}_2\| \neq \|\vec{r}_3\| \neq \|\vec{r}_4\|$$

Luego en la operación (1)-(2) tendríamos:

$$\vec{r}_0.(\vec{d}_1 - \vec{d}_2) = \frac{\|\vec{d}_2\|^2 - \|\vec{d}_1\|^2 + \|\vec{r}_1\|^2 - \|\vec{r}_2\|^2}{2}$$

Encontrando la diferencia

$$\frac{\|\vec{r}_1\|^2 - \|\vec{r}_2\|^2}{2}$$

Como única variación en la búsqueda de los puntos; es decir la solución estaría dada por:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} A & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ B & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ C & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & A & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & B & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & C & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}$$

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & A \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & B \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}}$$

Donde:

A= $\dfrac{\left\|\vec{d}_2\right\|^2 - \left\|\vec{d}_1\right\|^2 + \left\|\vec{r}_1\right\|^2 - \left\|\vec{r}_2\right\|^2}{2}$

B= $\dfrac{\left\|\vec{d}_3\right\|^2 - \left\|\vec{d}_2\right\|^2 + \left\|\vec{r}_2\right\|^2 - \left\|\vec{r}_3\right\|^2}{2}$

C= $\dfrac{\left\|\vec{d}_4\right\|^2 - \left\|\vec{d}_3\right\|^2 + \left\|\vec{r}_3\right\|^2 - \left\|\vec{r}_4\right\|^2}{2}$

Si desean comprobar este resultado, tal como yo lo hice, les recomiendo que usen dos sencillos programas para hacerlo: El Autocad para dibujar las esferas y obtener los puntos de intersección y un programa con funciones matriciales como el Excel con ellos podrán dar fe de que la formula cumple para cualquier caso.

Condiciones finales del problema

Como condición final del problema debería de aclara por si acaso alguien no hubiese caído en cuenta, de que el problema lo he descrito suponiendo que todos los elementos se encuentran en el vacío.

¿Que trato de decir con esto? Que en condiciones normales el tiempo de viaje no será directamente proporcional a la velocidad de la luz sino que variara dependiendo de las condiciones climáticas, la geografía, y la infraestructura del sitio donde se encuentre el aparato.

Bibliografía

Lehman, Ch. (1994). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Figueroa G.R (1992). *Vectores y Matrices*. Lima: Editorial San Marcos

ALFONSO BULLON VALLEJO

bullon_vallejo@hotmail.com